

2018年天津和平区理科高三二模数学试卷

一、选择题（每题5分，共40分）

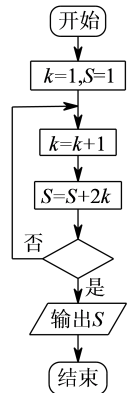
1. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, $A = \{x|x < 1\}$, $B = \{x|x \geq 2\}$, 则集合 $\complement_U(A \cup B)$ 等于 ().

- A. $\{x|x > 1\}$ B. $\{x|x \leq 2\}$ C. $\{x|1 < x \leq 2\}$ D. $\{x|1 \leq x < 2\}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y \geq 0, \\ y + 1 \geq 0, \\ x + y \leq 1, \end{cases}$ 则目标函数 $z = 2x + y - 1$ 的最大值为 ().

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

3. 阅读程序框图，运行相应的程序，若输出的 $S = 55$ ，则判断框内可填入 ().



- A. $k \geq 6?$ B. $k \geq 7?$ C. $k \geq 8?$ D. $k \geq 9?$

4. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则 " $x < 0$ " 是 " $x - \sin x < 0$ " 的 ().

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

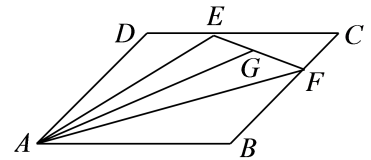
5. 已知抛物线 $x^2 = -4by$ 的准线与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右支分别交于 B, C 两点, A 为双曲线的右顶点, O 为坐标原点, 若 $\angle BOC = 4\angle AOC$, 则双曲线的渐近线方程为 ().

- A. $y = \pm\sqrt{6}x$ B. $y = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}x$ C. $y = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}x$ D. $y = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}x$

6. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, 它的图象上任意一点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线方程为 $y = (x_0^2 - x_0 - 2)x + (y_0 - x_0^3 + x_0^2 + 2x_0)$, 那么函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 ().

- A. $(-1, 2)$ B. $(-2, 1)$ C. $(-\infty, -1)$ D. $(2, +\infty)$

7. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 已知 $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{FC}$, G 为线段 EF 上的一点, 且 $\overrightarrow{EG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GF}$, $\overrightarrow{AG} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AD}$, 则 $\frac{\lambda}{\mu}$ 的值为 ().



- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{4}{7}$ D. $\frac{5}{8}$

8. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 4x + 1, & 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{2}f(x-1), & x > 1, \end{cases}$, 则关于 x 的方程 $6[f(x)]^2 + f(x) = 1$ 的实根的个数为 ().
- A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

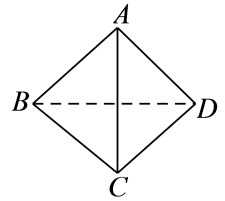
二、填空题 (每题5分, 共30分)

9. 设 i 是虚数单位, 则复数 $\frac{1-5i}{1-i}$ 的虚部为 _____.

10. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 3$, $\cos A = \frac{2}{3}$, $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{3\sqrt{5}}{2}$, 则 BC 边长为 _____.

11. 在极坐标系中, 直线 $l: \rho(\cos \theta + \sin \theta) = 6$, M 为圆 $\rho^2 = 4\rho \cos \theta - 3$ 上的任意一点, 设点 M 到直线 l 的距离为 d , 则 d 的最大值为 _____.

12. 如图, 已知正四面体 $A-BCD$ 的高为6, 则它的内切球的体积为 _____.



13. 已知 $ab > 0$, $a + b = 3$, 则 $\frac{b^2}{a+2} + \frac{a^2}{b+1}$ 的最小值为 _____.

14. 从0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7这八个数字中任取两个奇数和两个偶数, 组成没有重复数字的四位数, 则可组成的四位数中奇数的个数为 _____ (用数字作答).

三、解答题 (本大题共6小题, 共80分)

15. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \frac{1}{4}$.

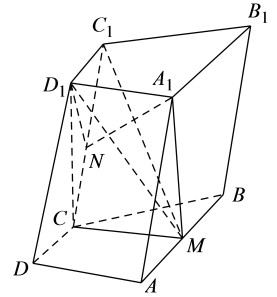
(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期及单调递减区间.

(2) 将函数 $y = f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后, 再将所得图象上各点的横坐标变为原来的2倍, 纵坐标不变, 得到函数 $y = g(x)$ 的图象, 若 $g(\alpha) = -\frac{12}{13}$, 且 $\alpha \in \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right)$, 求 $\sin\left(\alpha + \frac{15\pi}{12}\right)$ 的值.

16. 甲、乙、丙均两次参加英语高考, 取两次成绩中较高的为最终成绩, 三人第一次成绩不低于130分的概率依次为 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{2}$. 甲若第一次成绩不低于130分, 则第二次成绩不低于130分的概率为 $\frac{2}{3}$, 若第一次成绩在130分以下, 则第二次成绩不低于130分的概率为 $\frac{1}{3}$; 乙若第一次成绩不低于130分, 则第二次成绩不低于130分的概率为 $\frac{1}{4}$, 若第一次成绩在130分以下, 则第二次成绩不低于130分的概率为 $\frac{1}{2}$; 丙第二次成绩不受第一次成绩的影响, 不低于130分的概率为 $\frac{2}{3}$.

- (1) 设 A 为事件“甲的英语高考最终成绩不低于130分”， B 为事件“乙的英语高考最终成绩不低于130分”， C 为事件“丙的英语高考最终成绩不低于130分”，分别求出事件 A 、事件 B 、事件 C 发生的概率。
- (2) 设甲、乙、丙中英语高考最终成绩不低于130分的人数为 X ，求 X 的分布列与数学期望。

17. 如图，在四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是等腰梯形， $AB = 2CD = 2$ ， $\angle DAB = 60^\circ$ ， M 为 AB 的中点， $CD_1 \perp$ 平面 $ABCD$ ，且 $CD_1 = \sqrt{3}$ 。



- (1) 求证： $C_1M \parallel$ 平面 A_1ADD_1 。
- (2) 求平面 C_1D_1M 与平面 A_1D_1M 所成角的正弦值。
- (3) 若 N 为 CC_1 的中点，求直线 D_1M 与平面 A_1D_1N 所成角的正弦值。

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_1 = 1$ ， $a_2 = 3$ ，且 $a_{n+2} = (-1)^n(a_n - 1) + 2a_n + 1$ ， $n \in \mathbb{N}^*$ 。

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。
- (2) 设 $b_n = \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}$ ， S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，求证： $S_n \geq \frac{2^n - n}{2^n + 1}$ 。

19. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，椭圆短轴的一个端点与两个焦点构成三角形的面积为 $\sqrt{3}$ ，过椭圆的右焦点的动直线 l 与椭圆交于 A 、 B 两点。

- (1) 求椭圆的方程。
- (2) 若线段 AB 的垂直平分线与 x 轴相交于点 D ，与直线 l 交于 N ，当 $\frac{1}{8} < \frac{|DN|}{AB} < \frac{\sqrt{2}}{8}$ 时，求直线 l 的斜率的取值范围。
- (3) 在椭圆上是否存在定点 M ，使得对任意斜率等于 $\frac{1}{2}$ 且与椭圆交于 P 、 Q 两点的直线 (P 、 Q 两点均不在 x 轴上)，都满足 $k_{PM} + k_{QM} = 0$ (其中 k_{PM} 为直线 PM 的斜率， k_{QM} 为直线 QM 的斜率)？若存在，求出点 M 的坐标；若不存在，请说明理由。

20. 已知函数 $f(x) = \ln(x+a) - \frac{x}{a}$ ，其中 $a \in \mathbb{R}$ 且 $a \neq 0$ 。

- (1) 求 $f(x)$ 的单调区间。
- (2) 若 $f(x) - \frac{x}{a} < 0$ 恒成立，求 a 的取值范围。
- (3) 若存在 $-a < x_1 < 0$ ， $x_2 > 0$ ，使得 $f(x_1) = f(x_2) = 0$ ，求证： $x_1 + x_2 > 0$ 。